

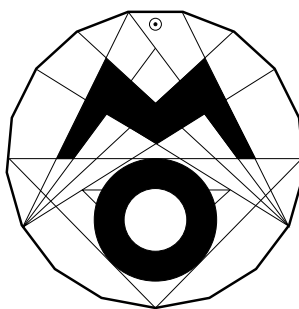
# Hinweis

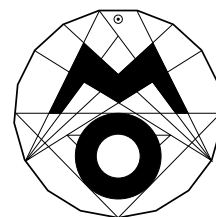
Diese Datei darf nur an Ausrichtende dieser 2. Runde der Mathematik-Olympiade weitergeleitet werden. Aufgaben und Lösungen sind bis zu den Wettbewerbsterminen geheim zu halten. Wegen möglicher abweichender Termine an bestimmten Wettbewerbsorten ist bis zum offiziellen Freischaltungstermin auf der Internetseite des Mathematik-Olympiaden e.V. (Olympiadeklassen 3–4: 01.04., Olympiadeklassen 5–12: 01.12.) jeder Verbreitung außerhalb der eigenen Wettbewerbsdurchführung unbedingt entgegenzuwirken.

<http://www.mathematik-olympiaden.de>

Auch eine spätere auszugsweise oder vollständige Veröffentlichung ist nicht zulässig. Das schließt insbesondere das Internet mit ein. Über Ausnahmen entscheidet der Mathematik-Olympiaden e.V. auf Antrag an den 1. Vorsitzenden, Herrn Prof. Dr. Jürgen Prestin.

[prestin@math.uni-luebeck.de](mailto:prestin@math.uni-luebeck.de)





600521 Lösung

10 Punkte

*Teil a)* Nils ist im Jahr  $(2020 - 7 = )$  2013 geboren.

*Teil b)* Nils ist Jahrgang 13. Gesucht ist also das Jahr, in dem Nils 13 Jahre alt wird. Wegen  $13 + 13 = 26$  ist das im Jahr 2026 der Fall.

*Hilfreiche Überlegungen:*

Die Summe aus Geburtsjahr und Alter ergibt das aktuelle Jahr. In dieser Aufgabe geht es um die letzten beiden Ziffern, den Jahrgang. Folglich gilt:

- (1) Die letzten beiden Ziffern der Summe aus Jahrgang und Alter sind die letzten beiden Ziffern des aktuellen Jahres.

Nun soll der Jahrgang gleich dem Alter sein. Folglich gilt:

- (2) Die letzten beiden Ziffern vom doppelten Alter sind gerade die letzten beiden Ziffern des Jahres, in dem jemand so alt wird wie sein Jahrgang.

*Teil c)* Solvejg wird im Jahr 2020 so alt wie ihr Jahrgang. Es gilt  $20 : 2 = 10$ . Wenn Solvejg Jahrgang 10 ist (von 2010), dann wird sie im Jahr 2020 gerade 10 Jahre alt.

*Teil d)* Oma Petra ist im vorigen Jahrhundert geboren. Es gilt  $((100 + 20) : 2 = ) 60$ . Wenn Oma Petra Jahrgang 60 ist (von 1960), dann wird sie im Jahr 2020 gerade 60 Jahre alt.

Es gibt keine weiteren Lösungen, denn für 220 gilt:  $220 : 2 = 110$ . Der Jahrgang darf aber nur zweistellig sein.

*Teil e)* Nein, das geht nicht, denn das Jahr 2021 ist ungerade. Weil 21 nicht durch 2 teilbar ist, kann 21 nicht die letzten beiden Ziffern des doppelten Alters darstellen.

600522 Lösung

10 Punkte

*Teil a)* Da die Ziffern untereinander verschieden sein sollen, kommt jede Ziffer in jeder Zahl nur einmal vor. Für die drei Ziffern 3, 4 und 7 gibt es daher sechs mögliche Zahlen und zwar: 347, 374, 437, 473, 734, 743.

Da nur nach der Anzahl gefragt ist, ist die folgende Berechnung ausreichend:

Es gibt  $(3 \cdot 2 \cdot 1 = )$  6 mögliche Zahlen aus den Ziffern 3, 4 und 7.

*Teil b)* Da auch hier die Berechnung ausreichend ist, gibt es  $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = )$  24 mögliche vierstellige Zahlen:

Für die Tausenderstelle gibt es 4 mögliche Ziffern, dann bleiben noch 3 mögliche Ziffern für die Hunderterstelle. Nun verbleiben noch 2 mögliche Ziffern für die Zehnerstelle und die noch übrige Ziffer wird an die Einerstelle geschrieben.

Die Schüler dürfen aber auch die 24 Zahlen **systematisch** aufschreiben.

*Teil c)* Für die Ziffer an der Zehnerstelle ergeben sich 4 Ziffern zur Auswahl, für die Ziffer an der Einerstelle stehen noch 3 Ziffern zur Verfügung.

Es gibt daher  $(4 \cdot 3 =)$  12 zweistellige Zahlen aus den Ziffern 2, 3, 4 und 7.

Auch das Aufzählen der 12 Zahlen 23, 24, 27, 32, 34, 37, 42, 43, 47, 72, 73, 74 ist hinreichend.

600523 Lösung

10 Punkte

Die Namen der fünf Kinder seien mit  $A, B, C, D$  und  $E$  abgekürzt.

*Teil a)* Bedingung (1) fordert, dass die drei Mädchen links, in der Mitte und rechts sitzen. Die Mädchen haben  $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$  6 Möglichkeiten, sich auf ihre Plätze zu verteilen und für jede dieser Möglichkeiten gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten der Platzierung der beiden Jungen.

Folglich gibt es zwölf mögliche Sitzordnungen:

- |                |                |                 |
|----------------|----------------|-----------------|
| 1. $A B C D E$ | 5. $C B A D E$ | 9. $E B A D C$  |
| 2. $A D C B E$ | 6. $C D A B E$ | 10. $E D A B C$ |
| 3. $A B E D C$ | 7. $C B E D A$ | 11. $E B C D A$ |
| 4. $A D E B C$ | 8. $C D E B A$ | 12. $E D C B A$ |

*Teil b)* Die Bedingung (2) schließt die Möglichkeiten 1, 2, 11 und 12 aus.

Die Bedingung (3) schließt weiterhin die Möglichkeiten 3, 4, 5, 7, 8 und 10 aus.

Es bleiben also zwei mögliche Sitzordnungen, die Möglichkeiten 6 und 9:

Charlotte-Dennis-Anna-Bernhard-Evelyn und Evelyn-Bernhard-Anna-Dennis-Charlotte.

600524 Lösung

10 Punkte

*Teil a)* Zum Beispiel 98768, denn  $9 + 8 + 7 + 6 + 8 = 38$ .

*Teil b)* In einer Tabelle lassen sich systematisch alle Möglichkeiten auflisten:

Doppelte Ziffer $a$	38 - 2a	Drei verschiedene Ziffern $b, c, d$	Lösung $a, a, b, c, d$
9	$38 - 2 \cdot 9 = 20$	$20 = 8 + 7 + 5$	9, 9, 8, 7, 5
8	$38 - 2 \cdot 8 = 22$	$22 = 9 + 7 + 6$	8, 8, 9, 7, 6
7	$38 - 2 \cdot 7 = 24$	$24 = 9 + 8 + 7$ , aber dann kommt die 7 dreimal vor.	—

Würde man für die doppelte Ziffer  $a$  eine kleinere Ziffer als 7 wählen, dann müsste die Summe der restlichen drei Ziffern größer als 24 sein. Das geht nicht, denn  $(7 + 8 + 9 =)$  24 ist die größtmögliche Summe von drei verschiedenen Ziffern.

Folglich gibt es genau zwei Möglichkeiten: 9, 9, 8, 7, 5 und 8, 8, 9, 7, 6.

*Teil c)* In einer Tabelle lassen sich systematisch alle Möglichkeiten auflisten:

Dreifache Ziffer $a$	$38 - 3a$	Zwei verschiedene Ziffern $b, c$	Lösung $a, a, a, b, c$
9	$38 - 3 \cdot 9 = 11$	$11 = 8 + 3$ $11 = 7 + 4$ $11 = 6 + 5$	9, 9, 9, 8, 3 9, 9, 9, 7, 4 9, 9, 9, 6, 5
8	$38 - 3 \cdot 8 = 14$	$14 = 9 + 5$	8, 8, 8, 9, 5
7	$38 - 3 \cdot 7 = 17$	$17 = 9 + 8$	7, 7, 7, 9, 8

Würde man für die dreifache Ziffer  $a$  eine kleinere Ziffer als 7 wählen, dann müsste die Summe der restlichen zwei Ziffern größer als 17 sein. Das geht nicht, denn  $(8 + 9 =) 17$  ist die größtmögliche Summe von zwei verschiedenen Ziffern.

Folglich gibt es genau fünf Möglichkeiten:

9, 9, 9, 8, 3; 9, 9, 9, 7, 4; 9, 9, 9, 6, 5; 8, 8, 8, 9, 5; 7, 7, 7, 9, 8

*Teil d)* Um die größte Quersumme zu bekommen, muss man die 5 größtmöglichen Ziffern verwenden: 9, 8, 7, 6, 5. Die Summe dieser Ziffern beträgt 35.

## Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

### Aufgabe 600521 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte
Teil b) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte
Teil c) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte
Teil d) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte
Teil e) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte

### Aufgabe 600522 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Herleitung ein Punkt und Ergebnis ein Punkt .....	2 Punkte
Teil b) Herleitung zwei Punkte und Ergebnis zwei Punkte .....	4 Punkte
Teil c) Herleitung zwei Punkte und Ergebnis zwei Punkte .....	4 Punkte

### Aufgabe 600523 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Herleitung / Angabe der Sitzanordnungen .....	4 Punkte
Teil b) .....	6 Punkte
Herleitung vier Punkte	
Angabe der Sitzanordnungen zwei Punkte	

### Aufgabe 600524 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Beispiel .....	1 Punkt
Teil b) .....	3 Punkte
Lösungsweg ein Punkt	
Angabe der zwei Möglichkeiten zwei Punkte	
Teil c) .....	4 Punkte
Lösungsweg zwei Punkte	
Angabe der fünf Möglichkeiten zwei Punkte	
Teil d) Herleitung und Ergebnis .....	2 Punkte