Richtlinien
zur Veröffentlichung der Aufgaben der ersten Runde im Internet

Um eine weite Verbreitung der Aufgaben der ersten Runde der Mathematik-Olympiade zu erreichen und die Arbeit der Organisatoren zu erleichtern, kann eine Veröffentlichung der Aufgaben im Internet während der Bearbeitungszeit hilfreich sein. Diese Veröffentlichung kann nicht vor, sondern erst nach Wettbewerbsende auf der Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. erfolgen, da der Verein nicht Ausrichter der ersten Runde ist und sonst die ausdrücklich nicht erwünschte Möglichkeit besteht, dass Einsendungen an den Verein bzw. die Geschäftsstelle erfolgen, die dort nicht bearbeitet werden können.
Die Aufgaben dürfen vom Schuljahresbeginn bis zum Beginn der zweiten Runde lokal auf der Webseite des Veranstalters der ersten Runde (z. B. Schulhomepage) zum Download angeboten werden, wenn die nachfolgend aufgeführten Rahmenbedingungen beachtet werden.

(1) Auf der Webseite des Veranstalters muss klar zum Ausdruck kommen:
   - wer der Ausrichter des Wettbewerbs ist,
   - wer teilnahmeberechtigt ist,
   - bei wem die Lösungen abzugeben sind,
   - wann der Abgabeschluss für die Lösungen ist,
   - wie über das Ergebnis informiert wird,
   - dass eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen untersagt ist.

   Ein Muster ist unten abgedruckt.

(2) Nach Ende der ersten Runde müssen die Aufgaben von der Webseite des Veranstalters entfernt und durch einen Link auf die Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. ersetzt werden:
   https://www.mathematik-olympiaden.de

(3) Die Lösungen dürfen zu keiner Zeit im Netz veröffentlicht werden.

Beispiel für eine Homepage, von der die Aufgaben der ersten Runde heruntergeladen werden können:

1. Runde der Mathematik-Olympiade 2020
an der xy-Schule in AB-Stadt

Der Wettbewerb richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der Olympiadeklassen 5 bis 12 unserer Schule.

Die Aufgaben können bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern in gedruckter Form abgeholt oder hier (Link) heruntergeladen werden.

Lösungen können bis zum ??.??.2020 bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (alternativ z.B. bei Herrn Müller im Lehrerzimmer) abgegeben werden.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten am ??.??.2020 das Ergebnis durch Aushang am Informationsbrett.

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer qualifizieren sich für die 2. Runde der Mathematik-Olympiade, die am 11.11.2020 als Regionalrunde in Pi-Stadt stattfinden wird.

Eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen ist untersagt.

Olympiadeklasse **6**

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600611

Judith beschäftigt sich mit Zahlen, die nur aus den Ziffern 1, 2 und 3 bestehen. Die Ziffern dürfen mehrfach in den gesuchten Zahlen vorkommen.

a) Wie viele dreistellige Zahlen aus diesen Ziffern gibt es?
b) Wie viele dieser dreistelligen Zahlen gibt es, die von vorn und hinten gelesen gleich sind? Wir nennen solche Zahlen Palindromzahlen.
c) Wie viele vierstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die gerade Zahlen sind?
d) Schließlich fragt sich Judith: Wie viele fünfstellige Palindromzahlen aus diesen Ziffern gibt es, die wiederum gerade Zahlen sind?

600612

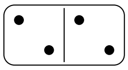
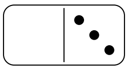
In dieser Aufgabe geht es darum, die Zahl 60 als Summe von verschiedenen Primzahlen darzustellen.

a) Stelle 60 als Summe von zwei verschiedenen Primzahlen dar. Gib alle Möglichkeiten an.
b) Stelle 60 als Summe von drei verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
c) Stelle 60 als Summe von vier verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
d) Stelle 60 als Summe von fünf verschiedenen Primzahlen dar. Gib eine Möglichkeit an.
e) Untersuche, ob man 60 als Summe von sechs verschiedenen Primzahlen darstellen kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600613

Die Spielsteine eines Dominospiels haben zwei Felder, auf denen jeweils eine bestimmte Anzahl von Punkten dargestellt ist, zum Beispiel

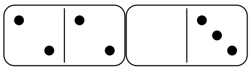
 oder  .

Jede mögliche Kombination von zwei Punktzahlen kommt genau einmal vor.

In dem hier betrachteten Dominospiel sind auf den beiden Seiten jeweils 0, 1, 2 oder 3 Punkte möglich. Das Dominospiel hat damit genau zehn Steine.

a) Zeichne die zehn Steine auf.

Nun werden die Steine aneinandergelegt, zum Beispiel:



In diesem Beispiel beträgt der Unterschied der Punktzahlen auf den Feldern der beiden benachbarten Steine 2.

b) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 1 beträgt.
c) Untersuche, ob es möglich ist, die zehn Steine so in eine Reihe zu legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 2 beträgt.
d) Wie viele Dominosteine kann man maximal so in eine Reihe legen, dass der Unterschied zwischen den Punktzahlen auf den Feldern benachbarter Steine immer 3 beträgt?
e) Begründe, dass man nicht alle zehn Steine so in eine Reihe legen kann, dass nur gleiche Punktzahlen aneinanderstoßen.

600614

Gegeben sind sechs quadratische Spielsteine:

ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm,
drei Quadrate mit der Seitenlänge 3 cm und
zwei Quadrate mit der Seitenlänge 2 cm.

a) Zeige, dass es nicht möglich ist, mit diesen Spielsteinen ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 cm vollständig auszulegen. Argumentiere nicht nur durch Zeichnen!
b) Lege aus allen Spielsteinen eine Figur mit einem Umfang von 32 cm.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich den Umfang von 32 cm hat.
c) Lege aus allen Spielsteinen eine zusammenhängende Figur mit einem Umfang von 60 cm.
Zusammenhängend soll bedeuten, dass die zusammenliegenden Quadrate eine gemeinsame Kante haben, die 1 cm, 2 cm oder 3 cm lang ist.
Zeichne die Figur auf kariertem Papier.
Zeige, dass deine Figur tatsächlich einen Umfang von 60 cm hat.

600611 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Für jede der drei Stellen gibt es drei Möglichkeiten: die Ziffern 1, 2 und 3. Daher gibt es insgesamt $(3 \cdot 3 \cdot 3 =)$ 27 Möglichkeiten, aus diesen Ziffern dreistellige Zahlen zu bilden.

Auch eine systematische Auflistung aller Zahlen führt zur Lösung.

Teil b) Für die Hunderterstelle gibt es 3 Möglichkeiten, für die Zehnerstelle gibt es 3 Möglichkeiten und die Einerstelle ist durch die Hunderterstelle schon vorgegeben. Daher gibt es insgesamt $(3 \cdot 3 \cdot 1 =)$ 9 Möglichkeiten, solche Palindromzahlen zu bilden.

Die 9 Palindromzahlen lauten:

111, 121, 131, 212, 222, 232, 313, 323, 333 .

Teil c) Da die Zahlen gerade sein sollen, müssen sie auf 2 enden. Damit sind die Einer- und die Tausenderstelle festgelegt.

Für die Hunderterstelle gibt es 3 Möglichkeiten und die Zehnerstelle ist durch die Hunderterstelle schon vorgegeben.

Also gibt es insgesamt $(1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 =)$ 3 Möglichkeiten, solche Palindromzahlen zu bilden.

Die drei Palindromzahlen lauten:

2112, 2222, 2332 .

Teil d) Da die Zahlen gerade sein sollen, müssen sie auf 2 enden. Damit sind die Einer- und die Zehntausenderstelle festgelegt.

Für die Tausender- und die Hunderterstelle gibt es je 3 Möglichkeiten. Die Zehnerstelle ist durch die Tausenderstelle schon vorgegeben.

Also gibt es insgesamt $(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 =)$ 9 Möglichkeiten, solche Palindromzahlen zu bilden.

Die 9 Palindromzahlen lauten:

21 112, 21 212, 21 312, 22 122, 22 222, 22 322, 23 132, 23 232, 23 332 .

Teil a)

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31.$$

Teil b) Die gerade Zahl 60 kann nicht als Summe von drei ungeraden Zahlen dargestellt werden. Da alle Primzahlen mit Ausnahme der 2 ungerade sind, muss die 2 unter den drei Primzahlen auftauchen.

Zu finden sind also noch zwei Primzahlen, deren Summe 58 beträgt.

Dies gelingt; es gilt $60 = 2 + 5 + 53 = 2 + 11 + 47 = 2 + 17 + 41$.

Teil c) Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
60 &= 3 + 5 + 11 + 41,\\
60 &= 3 + 5 + 23 + 29,\\
60 &= 3 + 7 + 13 + 37,\\
60 &= 3 + 7 + 19 + 31,\\
60 &= 3 + 11 + 17 + 29,\\
60 &= 5 + 7 + 11 + 37,\\
60 &= 5 + 7 + 17 + 31,\\
60 &= 5 + 7 + 19 + 29,\\
60 &= 5 + 11 + 13 + 31,\\
60 &= 5 + 13 + 19 + 23,\\
60 &= 7 + 11 + 13 + 29,\\
60 &= 7 + 11 + 19 + 23,\\
60 &= 7 + 13 + 17 + 23,\\
60 &= 11 + 13 + 17 + 19.
\end{aligned}$$

Teil d) Hier muss wieder die 2 auftauchen. Dann kann man weiter untersuchen:

Zum Beispiel $60 = 2 + 58 = 2 + 7 + 11 + 17 + 23$.

Teil e) Im Zahlenraum bis 60 stehen die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53$ und 59 zur Verfügung.

Von diesen müssen sechs ausgewählt werden, um die Summe 60 zu erhalten.

Die 2 darf nicht auftreten.

Die Summe der sechs kleinsten übrigen Primzahlen ist bereits $(3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 =)\,56$, also um 4 weniger als 60.

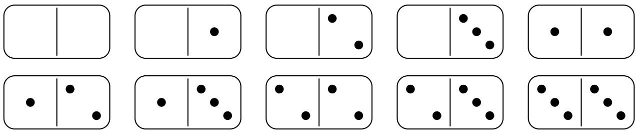
Die nächste zur Verfügung stehende Primzahl ist 19. Ersetzen wir die 17 durch die 19, so ist die Summe 58 – zu wenig. Ersetzen wir die 13 durch die 19, so ist die Summe 62 – zu viel. Das gilt entsprechend, wenn wir eine der kleineren Zahlen durch die 19 ersetzen. Folglich können wir die 19 nicht verwenden.

Wollen wir die nächste Primzahl, die 23, verwenden, so ist die Summe schon dann zu groß, wenn die 17 durch die 23 ersetzt wird: $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 23 = 62$. Folglich können weder die 23 noch größere Primzahlen verwendet werden.

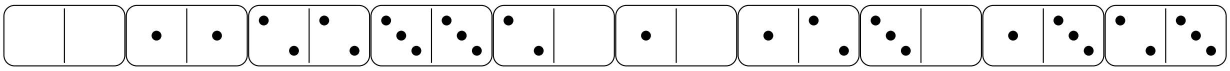
Somit lässt sich 60 nicht als Summe von 6 verschiedenen Primzahlen schreiben.

<u>600613 Lösung</u> *10 Punkte*

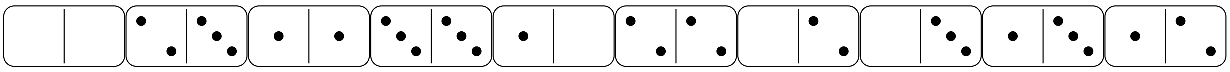
Teil a)



Teil b) Eine Möglichkeit ist:

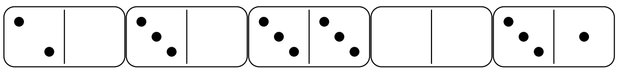


Teil c) Eine Möglichkeit ist:



Teil d) Da die Punktzahlen 1 und 2 zu keiner anderen Punktzahl den Unterschied 3 haben, kann man diese Punktzahlen an keinen Stein anlegen. Solche Steine müssen also am Rand liegen. In der Mitte bleiben die Steine (0,0), (0,3) und (3,3) übrig.

Folglich bestehen die längstmöglichen Reihen aus fünf Steinen, z. B.

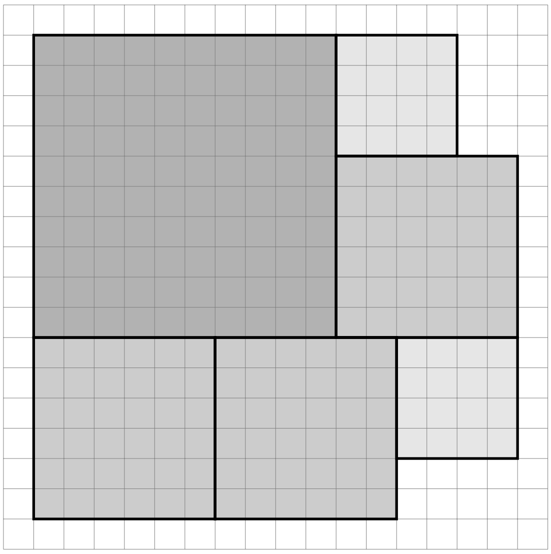


Teil e) Jede Anzahl von Punkten kommt auf den Dominosteinen insgesamt fünfmal vor. Man kann also für jede Punktzahl je zweimal zwei Steine mit gleichen Punktzahlen aneinanderlegen und behält dann für jede Punktzahl eine Seite eines Dominosteins übrig, die man nicht mehr anlegen kann. Wenn die Steine in eine Reihe gelegt werden sollen, kann es nur einen Anfangs- und einen Endstein geben, bei denen jeweils eine Punktzahl nicht an einen anderen Stein angelegt werden muss. Es bleiben folglich von den vier Punktzahlen zwei übrig, die nicht passend angelegt werden können.

<u>600614 Lösung</u> *10 Punkte*

Teil a) Die Gesamtfläche der sechs Spielsteine ist mit $(5\cdot 5+3\cdot 3\cdot 3+2\cdot 2\cdot 2=)\,60\,\text{cm}^2$ kleiner als die Fläche des 8×8 – Quadrats. Deshalb ist ein vollständiges Auslegen mit den gegebenen Spielsteinen nicht möglich. Die Abbildung aus b) kann hier zur Ergänzung angegeben werden.

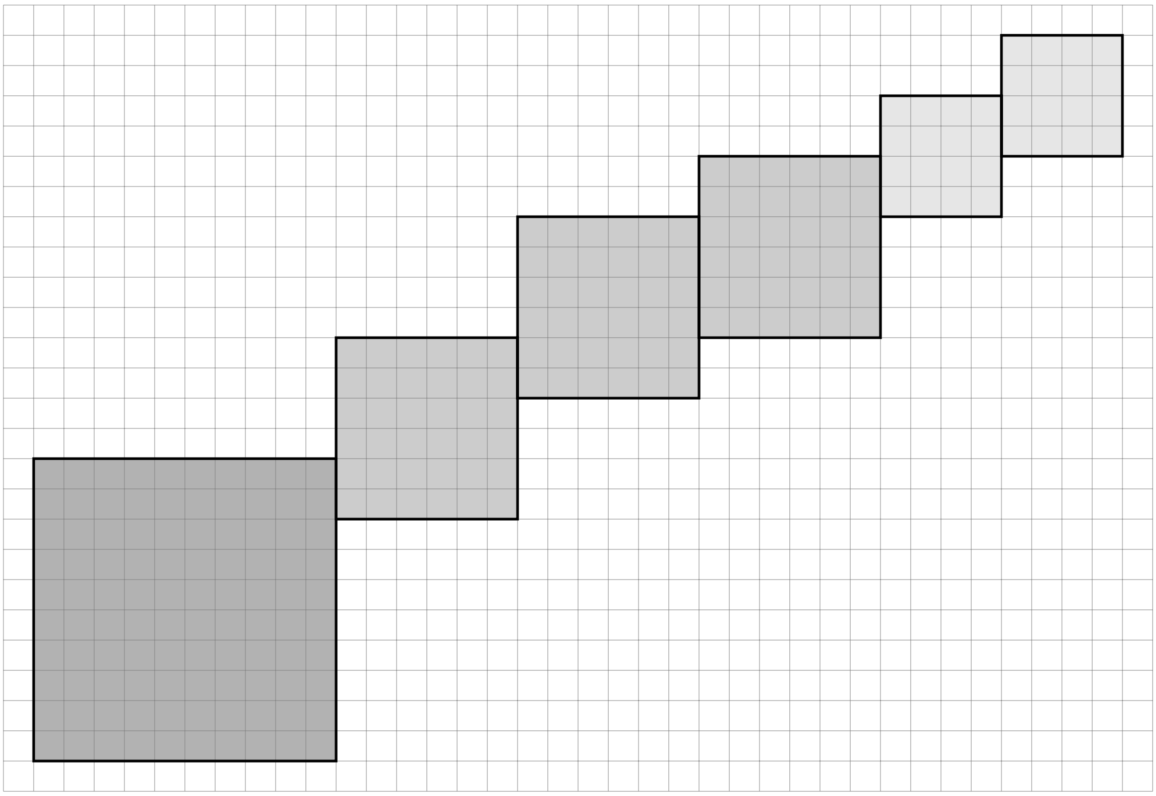
Teil b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Figur mit einem Umfang von 32 cm. Hierbei ist ein Kästchen 5 mm breit.



Die Summe der Seitenlängen beträgt z. B. (beginnend unten links und dann entgegen dem Uhrzeigersinn addiert) $(3\,\text{cm} + 3\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + \cdots + 5\,\text{cm} + 3\,\text{cm} =)\ 32\,\text{cm}$.

Variante: Diese Figur hat eine Breite von 8 cm, eine Höhe von 8 cm und keine Einbuchtungen, der Umfang der Figur beträgt also $u = 4 \cdot 8\,\text{cm} = 32\,\text{cm}$.

Teil c) Die Abbildung zeigt eine mögliche Figur mit einem Umfang von 60 cm.



Diese Figur hat eine Breite von $(5\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} + 2 \cdot 2\,\text{cm} =)\ 18\,\text{cm}$ und eine Höhe von $(4\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 1\,\text{cm} + 2\,\text{cm} =)\ 12\,\text{cm}$.

Da Breite und Höhe jeweils zweimal zu addieren sind, beträgt der Umfang tatsächlich 60 cm.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 600611	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	3 Punkte

Aufgabe 600612	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	2 Punkte
Teil e)	2 Punkte

Aufgabe 600613	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	2 Punkte
Teil b)	2 Punkte
Teil c)	2 Punkte
Teil d)	2 Punkte
Teil e)	2 Punkte

Aufgabe 600614	*Insgesamt: 10 Punkte*
Teil a)	3 Punkte
Teil b)	3 Punkte
Teil c)	4 Punkte