Richtlinien
zur Veröffentlichung der Aufgaben der ersten Runde im Internet

Um eine weite Verbreitung der Aufgaben der ersten Runde der Mathematik-Olympiade zu erreichen und die Arbeit der Organisatoren zu erleichtern, kann eine Veröffentlichung der Aufgaben im Internet während der Bearbeitungszeit hilfreich sein. Diese Veröffentlichung kann nicht vor, sondern erst nach Wettbewerbsende auf der Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. erfolgen, da der Verein nicht Ausrichter der ersten Runde ist und sonst die ausdrücklich nicht erwünschte Möglichkeit besteht, dass Einsendungen an den Verein bzw. die Geschäftsstelle erfolgen, die dort nicht bearbeitet werden können.

Die Aufgaben dürfen vom Schuljahresbeginn bis zum Beginn der zweiten Runde lokal auf der Webseite des Veranstalters der ersten Runde (z. B. Schulhomepage) zum Download angeboten werden, wenn die nachfolgend aufgeführten Rahmenbedingungen beachtet werden.

(1) Auf der Webseite des Veranstalters muss klar zum Ausdruck kommen:
   - wer der Ausrichter des Wettbewerbs ist,
   - wer teilnahmeberechtigt ist,
   - bei wem die Lösungen abzugeben sind,
   - wann der Abgabeschluss für die Lösungen ist,
   - wie über das Ergebnis informiert wird,
   - dass eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen untersagt ist.

   Ein Muster ist unten abgedruckt.

(2) Nach Ende der ersten Runde müssen die Aufgaben von der Webseite des Veranstalters entfernt und durch einen Link auf die Webseite des Mathematik-Olympiaden e.V. ersetzt werden:
   https://www.mathematik-olympiaden.de

(3) Die Lösungen dürfen zu keiner Zeit im Netz veröffentlicht werden.

Beispiel für eine Homepage, von der die Aufgaben der ersten Runde heruntergeladen werden können:

---

1. Runde der Mathematik-Olympiade 2020

an der xy-Schule in AB-Stadt

Der Wettbewerb richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der Olympiadeklassen 5 bis 12 unserer Schule.

Die Aufgaben können bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern in gedruckter Form abgeholt oder hier (Link) heruntergeladen werden.

Lösungen können bis zum ??.??.2020 bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (alternativ z.B. bei Herrn Müller im Lehrerzimmer) abgegeben werden.

Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten am ??.??.2020 das Ergebnis durch Aushang am Informationsbrett.

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer qualifizieren sich für die 2. Runde der Mathematik-Olympiade, die am 11.11.2020 als Regionalrunde in Pi-Stadt stattfinden wird.

Eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen ist untersagt.

Olympiadeklasse 7

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

600711

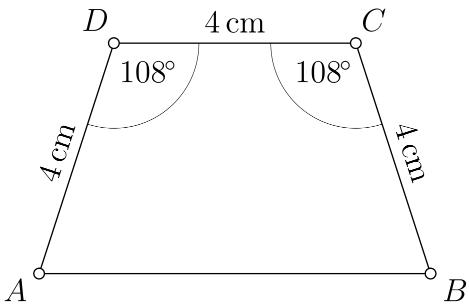
Dieser Aufgabe liegt eine Problemstellung zugrunde, die Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in seinem Buch „Liber Abaci“ im Jahre 1202 veröffentlicht hatte.

Von zwei Männern hatte der eine drei, der andere zwei Brote. Sie kamen gleichzeitig an einen Brunnen, auf dessen Rand sie sich setzten, um ihre Brote zu verzehren. Ein Wanderer kam des Weges, den sie einluden. Er setzte sich zu ihnen, und sie verzehrten alle fünf Brote, jeder die gleiche Ration. Als der Wanderer ging, ließ er fünf Münzen mit gleichem Wert zurück. Von diesen nahm sich der erste der beiden Männer drei und der zweite Mann zwei, entsprechend der Anzahl Brote, die sie zu Beginn hatten. Doch das war falsch, schrieb Fibonacci. Seiner Meinung nach hätten die Münzen den Brotmengen entsprechend, die jeder der Männer an den Wanderer abgab, verteilt werden sollen.

Wie viele Münzen hätte nach Fibonaccis Meinung der erste der beiden Männer und wie viele der zweite bekommen sollen? Begründe deine Antwort.

600712

Ein Trapez $ABCD$ mit den zueinander parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ hat die in der nebenstehenden Abbildung angegebenen Maße.



a) Berechne die Größen der Innenwinkel des Teildreiecks ABC.

b) Begründe, warum die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ gleich lang sind.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

600713

Die folgende Tabelle zeigt einen Stundenplanausschnitt einer Schule.

Montag			Dienstag		
Stunde	Klasse 8a	Klasse 9b	Stunde	Klasse 8a	Klasse 9b
1	Deutsch	Sport	1	Englisch	Deutsch
2	Kunst	Deutsch	2	Mathematik	Englisch
3	Biologie	Englisch	3	Mathematik	Biologie
4	Sport	Physik	4	Deutsch	Mathematik
5	Englisch	Mathematik	5	Geschichte	Deutsch
6	Physik	Geschichte	6	Biologie	–

Die angegebenen Unterrichtsfächer werden von Frau Altmann, Frau Berger, Herrn Cornelius und Herrn Dorn unterrichtet. Es ist bekannt:

(1) Jede Lehrkraft unterrichtet genau zwei der genannten Fächer.
(2) Herr Dorn unterrichtet am Dienstag nur in den ersten beiden Stunden.
(3) Frau Berger unterrichtet dienstags nicht.
(4) Herr Cornelius unterrichtet montags nur in Klasse 9b.
(5) Die Englischlehrkraft unterrichtet montags erst ab der dritten Stunde.

Zeige, dass aus diesen Angaben eindeutig ermittelt werden kann, wer welches Fach unterrichtet, und gib diese Zuordnung an.

600714

a) Die dreistellige Zahl 139 hat die Ziffern 1, 3 und 9 sowie die Quersumme $(1 + 3 + 9 =)$ 13.

Ermittle die Summe aller dreistelligen Zahlen, die jeweils aus allen drei Ziffern der Zahl 139 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 139 ist.

b) Ermittle die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl 9 876 bestehen, und weise nach, dass diese Summe ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl 9 876 ist.

c) Weise nach, dass für jede vierstellige Zahl z mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gilt:

Die Summe aller vierstelligen Zahlen, die jeweils aus allen vier Ziffern der Zahl z bestehen, ist ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl z.

Für besonders Interessierte:

d) Weise nach, dass für jede achtstellige Zahl z mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gilt:

Die Summe aller achtstelligen Zahlen, die jeweils aus allen acht Ziffern der Zahl z bestehen, ist ein Vielfaches der Quersumme der Ausgangszahl z.

60. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

600711 Lösung *8 Punkte*

Da jeder der drei Männer die gleiche Ration Brot verzehrte, aß jeder $\frac{5}{3}$ Brote. Also gab der erste der beiden Männer $(3 - \frac{5}{3} =)$ $\frac{4}{3}$ Brote an den Wanderer und der zweite $(2 - \frac{5}{3} =)$ $\frac{1}{3}$. Da der erste der beiden Männer also viermal so viel Brot abgab wie der zweite, sollte dieser – Fibonaccis Meinung nach – auch viermal so viele Münzen erhalten wie der zweite. Folglich hätte von den fünf Münzen, die der Wanderer zurückließ, der erste der beiden Männer vier Münzen und der zweite eine Münze bekommen sollen.

600712 Lösung *10 Punkte*

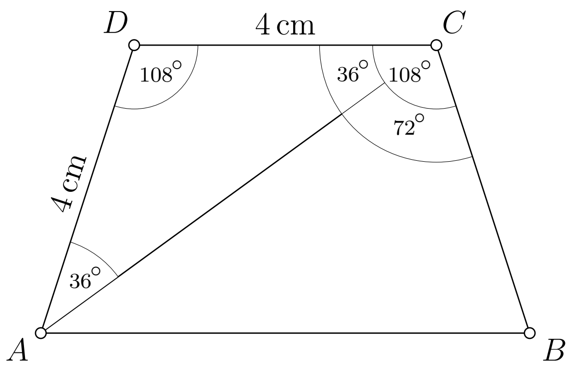
Teil a) Nach Aufgabenstellung gilt $|AD| = 4\,\text{cm} = |CD|$, weswegen das Dreieck ACD gleichschenklig mit der Basis $\overline{AC}$ ist. Nach dem Basiswinkelsatz gilt daher $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DCA|$. Hieraus, aus der Vorgabe $|\sphericalangle ADC| = 108°$ und nach dem Innenwinkelsatz folgt

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DCA| = \frac{1}{2} \cdot (180° - 108°) = 36°\,.$$

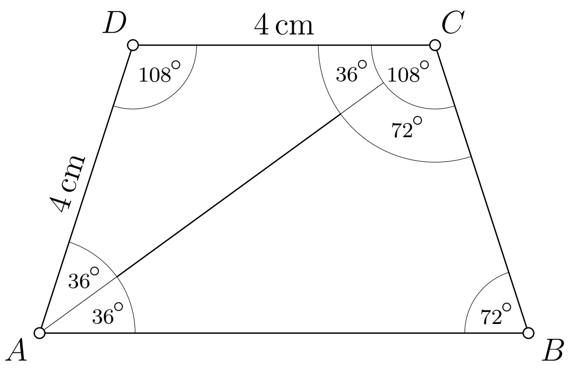
Hieraus und aus der Vorgabe $|\sphericalangle DCB| = 108°$ folgt

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCB| - |\sphericalangle DCA| = 108° - 36° = 72°\,,$$

siehe Abbildung L 600712 a.



L 600712 a



L 600712 b

Nach Aufgabenstellung sind die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ parallel zueinander. Daher sind die Winkel $\sphericalangle DCB$ und $\sphericalangle CBA$ entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden, weswegen $|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle CBA| = 180°$ nach dem Stufenwinkelsatz und dem Nebenwinkelsatz gilt. Hieraus und aus $|\sphericalangle DCB| = 108°$ folgt $|\sphericalangle CBA| = 180° - 108° = 72°$. Hieraus, aus $|\sphericalangle ACB| = 72°$ und nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck folgt $|\sphericalangle BAC| = 36°$, siehe Abbildung L 600712 b.

Folglich gelten $|\sphericalangle BAC| = 36°$, $|\sphericalangle CBA| = 72°$ und $|\sphericalangle ACB| = 72°$.

Teil b) Mit den zu Teilaufgabe a) entsprechenden Überlegungen folgt auch $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ADB| = 72°$. Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist das Dreieck ABD daher gleichschenklig mit der Basis $\overline{AD}$. Folglich gilt $|AB| = |BD|$.

Bemerkung: Die Problematik in Teilaufgabe a) wird auch als „Winkeljagen" bezeichnet: Einige Winkelgrößen sowie geeignete Angaben zu Strecken sind vorgegeben. Zu bestimmen sind weitere Winkelgrößen. Bei solchen Aufgaben kann es hilfreich sein, gleichschenklige Dreiecke, Scheitel- oder Nebenwinkel zu erkennen, um so unter Nutzung des Satzes zur Innenwinkelsumme Aussagen zu weiteren Winkeln zu erhalten. Insbesondere kann es, wie bei dieser Aufgabe, der Lösungsfindung dienlich sein, geeignete Hilfsfiguren, Hilfslinien oder Hilfspunkte zu erkennen.

600713 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Da an den zwei Tagen die genannten Fächer nur von den genannten Lehrkräften unterrichtet werden und nach Aussage (1) jede der vier Lehrkräfte genau 2 der 8 Fächer unterrichtet, folgt:

(6) Jedes der genannten Fächer wird von genau einer der genannten Lehrkräfte unterrichtet.

Um die Zuordnung der vier Lehrkräfte zu den acht Fächern zu ermitteln, erstellen wir eine Tabelle. Die Spalten werden mit den Anfangsbuchstaben der Fächer beschriftet. Wir füllen die Tabelle nun schrittweise aus, indem wir „−" und die Schrittnummer eintragen, wenn wir schließen können, dass die Lehrkraft dieses Fach nicht unterrichtet. Entsprechend tragen wir „+" und die Schrittnummer ein, wenn wir schließen können, dass die Lehrkraft dieses Fach unterrichtet.

	B	D	E	G	K	M	P	S
Altmann	+ [12]	+ [12]	− [2]	− [8]	− [11]	− [8]	− [5]	− [11]
Berger	− [9]	− [9]	− [2]	− [8]	+ [10]	− [8]	− [5]	+ [10]
Cornelius	− [6]	− [6]	− [2]	+ [7]	− [6]	+ [7]	− [5]	− [6]
Dorn	− [1]	− [1]	+ [1]	− [1]	− [3]	− [1]	+ [4]	− [3]

[1] Mit den Aussagen (2) und (6) folgt, dass Herr Dorn weder Biologie, Deutsch, Geschichte noch Mathematik, aber Englisch unterrichtet.

[2] Wegen Aussage (6) unterrichten die anderen Lehrkräfte nicht Englisch.

[3] Mit den Aussagen (5) und (6) folgt, dass Herr Dorn weder Kunst noch Sport unterrichtet.

[4] Mit der Aussage (1) und den bisherigen Feststellungen folgt nun, dass Herr Dorn Physik unterrichtet.

[5] Wegen Aussage (6) unterrichten die anderen Lehrkräfte nicht Physik.

[6] Mit den Aussagen (4) und (6) folgt, dass Herr Cornelius weder Biologie, Deutsch, Kunst noch Sport unterrichtet.

[7] Mit der Aussage (1) und den bisherigen Feststellungen folgt, dass Herr Cornelius Geschichte und Mathematik unterrichtet.

[8] Wegen Aussage (6) unterrichten die anderen Lehrkräfte nicht Geschichte oder Mathematik.

[9] Mit der Aussage (3) folgt, dass Frau Berger weder Biologie noch Deutsch unterrichtet.

[10] Mit der Aussage (1) und den bisherigen Feststellungen folgt, dass Frau Berger Kunst und Sport unterrichtet.

[11] Da jedes Fach nur von einer Lehrkraft unterrichtet wird, unterrichtet Frau Altmann weder Kunst noch Sport.

[12] Mit der Aussage (1) und den bisherigen Feststellungen folgt, dass Frau Altmann Biologie und Deutsch unterrichtet.

Aus den Angaben der Aufgabe kann daher eindeutig ermittelt werden, wer welches Fach unterrichtet: Frau Altmann unterrichtet Biologie und Deutsch, Frau Berger Kunst und Sport, Herr Cornelius Geschichte und Mathematik und Herr Dorn Englisch und Physik.

Zweite Lösung: Da an den zwei Tagen die genannten Fächer nur von den genannten Lehrkräften unterrichtet werden und nach Aussage (1) jede der vier Lehrkräfte genau 2 der 8 Fächer unterrichtet, folgt, dass jedes der genannten Fächer von genau einer der genannten Lehrkräfte unterrichtet wird.

Wegen Aussage (1) unterrichtet die Englischlehrkraft genau ein weiteres der genannten acht Fächer. Nach obiger Bemerkung ist die Englischlehrkraft nicht auch die Biologie-, Deutsch- oder Mathematiklehrkraft, da Biologie, Deutsch und Mathematik zur selben Zeit wie Englisch unterrichtet werden. Wegen Aussage (5) ist die Englischlehrkraft nicht auch die Kunst- oder Sportlehrkraft, da Kunst und Sport montags in den ersten beiden Stunden unterrichtet werden. Daher ist die Englischlehrkraft entweder Geschichts- oder Physiklehrkraft.

Da Herr Dorn nach Aussage (2) in diesen beiden Klassen am Dienstag nur in den ersten beiden Stunden unterrichtet, ist er nicht die Deutsch-, Geschichts- oder Mathematiklehrkraft, da Deutsch, Geschichte und Mathematik später noch an diesem Tag auf dem Stundenplan stehen. Daher ist Herr Dorn die Englischlehrkraft. Da die Englischlehrkraft auch entweder die Geschichts- oder die Physiklehrkraft ist, Herr Dorn aber nicht die Geschichtslehrkraft ist, ist Herr Dorn die Physiklehrkraft.

Wegen Aussage (3) unterrichtet Frau Berger weder Biologie, Deutsch, Geschichte noch Mathematik, da diese Fächer dienstags auf dem Stundenplan stehen. Da Herr Dorn Englisch und Physik unterrichtet und jedes Fach nur von einer der vier Lehrkräfte unterrichtet wird, verbleiben für Frau Berger nur Kunst und Sport. Hieraus und aus Aussage (1) folgt, dass Frau Berger Kunst und Sport unterrichtet.

Da jedes der acht genannten Fächer von einer der vier Lehrkräfte unterrichtet wird, müssen Frau Altmann und Herr Cornelius zusammen die vier Fächer Biologie, Deutsch, Geschichte und Mathematik unterrichten, und zwar wegen Aussage (1) beide jeweils genau zwei dieser Fächer. Da Deutsch dienstags zeitgleich mit Geschichte und Mathematik unterrichtet wird, ist die Deutschlehrkraft weder Geschichts- noch Mathematiklehrkraft und daher die Biologielehrkraft.

Da Biologie und Deutsch montags bei der Klasse 8a auf dem Stundenplan stehen, ist Herr Cornelius wegen Aussage (4) nicht die Biologie- und Deutschlehrkraft, sondern die Geschichts- und Mathematiklehrkraft, und Frau Altmann ist die Biologie- und Deutschlehrkraft.

Aus den Angaben der Aufgabe kann daher eindeutig ermittelt werden, wer welches Fach unterrichtet: Frau Altmann unterrichtet Biologie und Deutsch, Frau Berger Kunst und Sport, Herr Cornelius Geschichte und Mathematik und Herr Dorn Englisch und Physik.

Dritte Lösung: Da an den zwei Tagen die genannten Fächer nur von den genannten Lehrkräften unterrichtet werden und nach Aussage (1) jede der vier Lehrkräfte genau 2 der 8 Fächer unterrichtet, gilt:

(6) Jedes der genannten Fächer wird von genau einer der genannten Lehrkräfte unterrichtet.

Nach den Aussagen (4) und (6) unterrichtet Herr Cornelius weder Biologie, Deutsch, Englisch, Kunst, Physik noch Sport. Es verbleiben nur noch Geschichte und Mathematik. Wegen der Aussage (1) gilt daher:

(7) Herr Cornelius unterrichtet Geschichte und Mathematik.

Da Herr Dorn wegen der Aussage (2) am Dienstag in diesen beiden Klassen nur in den ersten beiden Stunden unterrichtet, folgt hieraus und aus Aussage (6), dass Herr Dorn weder Biologie, Deutsch, Geschichte noch Mathematik unterrichtet. Da er aber am Dienstag in den beiden ersten Stunden unterrichtet, aber Deutsch und Mathematik nicht unterrichtet, unterrichtet er Englisch. Da die Englischlehrkraft, also Herr Dorn, nach der Aussage (5) montags erst ab der dritten Stunde unterrichtet, folgt aus Aussage (6), dass er weder das Fach Kunst noch das Fach Sport unterrichtet. Es verbleibt daher für ihn nur noch Physik. Nach der Aussage (1) gilt folglich:

(8) Herr Dorn unterrichtet Englisch und Physik.

Nach den Aussagen (3) und (6) unterrichtet Frau Berger weder Biologie, Deutsch, Geschichte, Englisch noch Mathematik. Es verbleiben nur noch Kunst, Physik und Sport. Nach den Aussagen (6) und (8) unterrichtet sie nicht Physik. Nach der Aussage (1) gilt daher:

(9) Frau Berger unterrichtet Kunst und Sport.

Aus den Aussagen (6), (7), (8) und (9) folgt:

(10) Frau Altmann unterrichtet Biologie und Deutsch.

Aus den Angaben der Aufgabe kann daher eindeutig ermittelt werden, wer welches Fach unterrichtet. Die Zuordnung ist in (7), (8), (9) und (10) angegeben.

Bemerkung: Bei Zuordnungsaufgaben wie dieser kann eine Tabelle zur Lösungsfindung und Lösungsdarstellung hilfreich sein. Die alleinige Angabe einer ausreichend ausgefüllten Tabelle genügt aber noch nicht den Anforderungen an die Lösungsdarstellung, da der Lösungsweg mit Begründungen deutlich erkennbar sein soll. In der ersten Lösung wurde daher dargestellt, mit welchen Begründungen und in welcher Reihenfolge die Tabelle zur Lösungsfindung ausgefüllt wird.

600714 Lösung *12 Punkte*

Erste Lösung: Teil a) Die dreistelligen Zahlen, welche jede der Ziffern 1, 3 und 9 enthalten, sind 139, 193, 319, 391, 913, 931. Deren Summe ist $(139 + 193 + 319 + 391 + 913 + 931 =)$ 2 886. Es gilt $2\,886 : 13 = 222$. Daher ist die Summe der Zahlen das 222-fache der Quersumme von 139.

Teil b) Die vierstelligen Zahlen, welche jede der Ziffern 9, 8, 7 und 6 enthalten, sind der Größe nach geordnet 6 789, 6 798, 6 879, 6 897, 6 978, 6 987, 7 689, 7698, 7 869, 7 896, 7 968, 7 986, 8 679, 8 697, 8 769, 8 796, 8 967, 8 976, 9 678, 9 687, 9 768, 9 786, 9 867 und 9 876. Bei diesen vierundzwanzig Zahlen kommt jede der Ziffern 6, 7, 8 und 9 genau sechsmal als Einer-, Zehner-, Hunderter- und Tausenderziffer vor. Daher ist $(6 \cdot (6 + 7 + 8 + 9) =)$ 180 die Summe der Einer-, Zehner-, Hunderter- bzw. Tausenderziffern, also $(180 \cdot 1\,111 =)$ 199 980 die Summe dieser vierundzwanzig Zahlen. Die Quersumme von 9 876 ist 30. Wegen $199\,980 : 30 = 6\,666$ ist diese Summe tatsächlich ein Vielfaches der Quersumme von 9 876.

Teil c) Wir betrachten eine vierstellige Zahl $a\,bcd$ mit den untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern a, b, c und d. Da diese vier Ziffern untereinander und von 0 verschieden sind, sind $a\,bcd$, $a\,bdc$, $a\,cbd$, $a\,cdb$, $a\,dbc$, $a\,dcb$, $b\,acd$, $b\,adc$, $b\,cad$, $b\,cda$, $b\,dac$, $b\,dca$, $c\,abd$, $c\,adb$, $c\,bad$, $c\,bda$, $c\,dab$, $c\,dba$, $d\,abc$, $d\,acb$, $d\,bac$, $d\,bca$, $d\,cab$, $d\,cba$ alle vierstelligen Zahlen mit jeder der Ziffern a, b, c und d. Da jede der Ziffern an der Einer-, an der Zehner-, an der Hunderterstelle und der Tausenderstelle genau sechsmal vorkommt, ist $6 \cdot a \cdot 1\,111 + 6 \cdot b \cdot 1\,111 + 6 \cdot c \cdot 1\,111 + 6 \cdot d \cdot 1\,111$, also $6\,666 \cdot (a + b + c + d)$ deren Summe. Diese Summe ist folglich tatsächlich das 6 666-fache der Quersumme $a + b + c + d$ der Ausgangszahl $a\,bcd$.

Teil d) Wir betrachten eine achtstellige Zahl $ab\,cde\,fgh$ mit den untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern a, b, c, d, e, f, g und h sowie alle achtstelligen Zahlen, die aus jeder dieser acht Ziffern bestehen. Es sei n die Anzahl dieser achtstelligen Zahlen, bei denen a an der ersten Stelle auftritt. Da die acht Ziffern untereinander und von 0 verschiedenen sind, tritt jede von ihnen bei den aus ihnen bestehenden achtstelligen Zahlen an jeder der acht Stellen insgesamt n-mal auf. Die Summe aller dieser achtstelligen Zahlen ist daher $n \cdot (a+b+c+d+e+f+g+h) \cdot 11\,111\,111$. Folglich ist diese Summe ein Vielfaches der Quersumme $a+b+c+d+e+f+g+h$ der Ausgangszahl.

Zweite Lösung: Teil a) Es seien a, b und c drei untereinander und von 0 verschiedene Ziffern. Es gibt genau $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Anordnungen dieser drei Ziffern ohne Wiederholung und daher genau 6 dreistellige Zahlen, die aus jeder dieser drei Ziffern bestehen. Unter diesen sechs Zahlen steht jede der Ziffern a, b und c genau 2-mal an Einer-, an Zehner- bzw. an Hunderterstelle. Daher ist $(a + b + c) \cdot 2 \cdot 111$ die Summe dieser dreistelligen Zahlen, welche das 222-fache der Quersumme der Ausgangszahl $100a + 10b + c$ ist. Daher gilt die Behauptung insbesondere auch für $a = 1$, $b = 3$ und $c = 9$.

Teil c) Es sei z eine vierstellige Zahl mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern a, b, c und d. Es gibt genau $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 Anordnungen der vier Ziffern a, b, c und d ohne Wiederholung und daher genau 24 vierstellige Zahlen, die aus jeder dieser vier Ziffern bestehen. Unter diesen 24 Zahlen steht jede der Ziffern a, b, c und d genau $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6-mal an Einer-, an Zehner-, an Hunderter- bzw. an Tausenderstelle. Daher ist $(a+b+c+d) \cdot 6 \cdot 1\,111$ die Summe dieser vierstelligen Zahlen, welche das 6 666-fache der Quersumme $a + b + c + d$ der Ausgangszahl ist.

Teil b) Für die Ausgangszahl 9 876 ergibt sich nach Teil c) $((9+8+7+6) \cdot 6\,666 = 30 \cdot 6\,666 =)$ 199 980 als Summe aller vierstelligen Zahlen, die aus jeder der vier Ziffern von 9 876 bestehen. Offenbar ist diese Zahl das 6 666-fache der Quersumme von 9 876.

Teil d) Es sei z eine achtstellige Zahl mit untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern a, b, c, d, e, f, g und h. Es gibt genau $(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 8! Anordnungen dieser acht Ziffern ohne Wiederholung und daher genau 8! achtstellige Zahlen, die aus jeder dieser acht Ziffern a, b, c, d, e, f, g und h bestehen. Unter diesen 8! Zahlen steht jede der Ziffern a, b, c, d, e, f, g und h genau $(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 7!-mal an jeder der 8 Positionen. Daher ist $(a + b + c + d + e + f + g + h) \cdot 7! \cdot 11\,111\,111$ die Summe dieser achtstelligen Zahlen, welche das $7! \cdot 11\,111\,111$-fache der Quersumme $a + b + c + d + e + f + g + h$ der Ausgangszahl ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 600711 — *Insgesamt: 8 Punkte*

Begründete Feststellung: Jeder verzehrte $\frac{5}{3}$ Brote ... 2 Punkte
Begründete Feststellung: Der erste Mann gab $\frac{4}{3}$ ... 2 Punkte
Begründete Feststellung: Der zweite Mann gab $\frac{1}{3}$ ... 2 Punkte
Begründete Feststellung: Der erste Mann erhält viermal so viel ... 1 Punkt
Korrekter Ergebnissatz ... 1 Punkt

Aufgabe 600712 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) ... 6 Punkte
Teil b) ... 4 Punkte

Aufgabe 600713 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Für jede ausreichend begründete Zuordnung einer Lehrkraft zu 2 Fächern jeweils 2 Punkte, also insgesamt ... 8 Punkte
Für die Verwendung einer Lösungsstrategie, die ausschließt, dass es andere als die genannten Zuordnungen gibt ... 2 Punkte

Aufgabe 600714 — *Insgesamt: 9+3 Punkte*

Teil a) ... 3 Punkte
Teil b) ... 3 Punkte
Teil c) ... 3 Punkte
Teil d) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) ... 3 Punkte