



© 2022 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

620621

In einem Klostergarten gibt es einen quadratischen Teich, dessen Seitenlänge 12 m beträgt. Um den Teich herum befindet sich ein Beet, das zwei Meter breit ist. Rings um das Beet führt ein Kiesweg, der 60 cm breit ist. Außen bilden Beet und Kiesweg jeweils ein Quadrat.

Der Kiesweg muss jeden Morgen geharkt werden.

- a) Fertige eine Skizze an, die den Klostergarten mit Teich, Beet und Kiesweg veranschaulicht.
Ermittle, welche Flächengröße der zuständige Mönch jeden Morgen harken muss. Runde dein Ergebnis auf ganze Quadratmeter.
- b) Beim Harken fragt sich der Mönch, ob der Teich oder das Beet mehr Fläche aufweist. Entscheide, welche Fläche größer ist.

620622

Ein Eichhörnchen versteckt seinen Wintervorrat an Nüssen in einem Garten an verschiedenen Orten:

$\frac{2}{5}$ des Vorrats versteckt es unter einer Bank, $\frac{1}{6}$ hinter dem Schuppen, $\frac{3}{8}$ im Gebüsch hinter der Regentonne und den Rest in einer Holzkiste neben dem Komposthaufen.

- a) Wie viele Nüsse sind in der Holzkiste, wenn das Eichhörnchen insgesamt 120 Nüsse versteckt hat?

Im Laufe des Winters werden von den 120 Nüssen einige aufgegessen.

Insgesamt sind noch 51 versteckte Nüsse übrig.

Unter der Bank sind 3 Nüsse mehr als hinter der Regentonne, hinter dem Schuppen sind 8 Nüsse mehr als in der Holzkiste und hinter der Regentonne sind viermal so viele Nüsse wie in der Holzkiste.

- b) Ermittle, wie viele Nüsse sich nun noch an jedem der vier Orte befinden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620623

Amelie, Britta und Charlotte haben Körper aus Pappe gebastelt. Ein Mädchen hat einen Würfel gebastelt, ein Mädchen eine Pyramide und das dritte einen Kegel. Die Körper stehen in der Mitte des Tisches.

Die Lehrerin fragt sich, welches Mädchen welchen Körper gebastelt hat.

- a) Gib alle verschiedenen Möglichkeiten für diese Zuordnung an.

Die Lehrerin macht nun Folgendes: Sie stellt eine Kiste mit 24 Murmeln auf den Tisch und gibt Amelie davon eine Murmel, Britta zwei und Charlotte drei Murmeln.

Die Mädchen sollen sich noch weitere Murmeln aus der Kiste nehmen:

- Das Kind, das den Würfel gebastelt hat, soll sich die gleiche Anzahl Murmeln nehmen, die es bereits hat.
- Das Kind, das die Pyramide gebastelt hat, soll sich die doppelte Anzahl Murmeln nehmen, die es bereits hat.
- Das Kind mit dem Kegel soll sich die vierfache Anzahl nehmen.

Die Lehrerin verlässt dabei den Raum.

Als sie wieder hereinkommt, liegen in der Kiste noch genau fünf Murmeln.

Sofort weiß die Lehrerin, welches Mädchen welchen Körper gebastelt hat.

- b) Untersuche, wie die Lehrerin aus der Restanzahl von fünf Murmeln herausfinden konnte, welches Mädchen welchen Körper gebastelt hat.

620624

Alex läuft von der Haustür bis zu seiner Wohnung im 6. Stock sechs Treppen mit je 18 Stufen hoch.

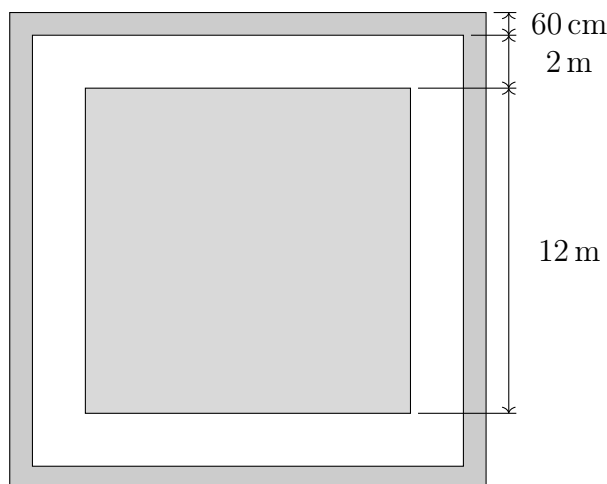
- a) Beim Hochlaufen schafft Alex zwei Stufen in einer Sekunde.
Wie lange braucht er von der Haustür bis zur Wohnungstür?
Gerade Strecken auf den einzelnen Etagen werden hierbei nicht berücksichtigt.
- b) Als Opa Jürgen an der Haustür klingelt, drückt Alex auf den Türöffner und läuft die Treppe nach unten. Opa Jürgen geht gleichzeitig die Treppe nach oben. Beim Hinunterlaufen ist Alex dreimal so schnell wie Opa Jürgen beim Hochgehen.
Auf welcher Stufe treffen sie sich, wenn man die Stufen von unten zählt?
- c) Die beiden gehen nun zusammen gleich schnell nach oben. Als sie im 3. Stock ankommen, fällt Alex ein, dass er noch die Zeitung aus dem Briefkasten holen soll. Während Opa Jürgen weiter nach oben geht, läuft Alex wieder dreimal so schnell hinunter zur Haustür, schnappt sich die Zeitung in Nullkommanichts und läuft wieder hoch. Beim Hochlaufen ist Alex nur noch doppelt so schnell wie sein Opa.
Wer von beiden kommt zuerst oben an?



620621 Lösung

10 Punkte

Die (nicht maßstäbliche) Skizze stellt die Situation dar:



Teil a) Da der Teich eine Seitenlänge von 12 m hat, beträgt die äußere Seitenlänge des Beets ($12\text{ m} + 2\text{ m} + 2\text{ m} =$) 16 m, und da der Kiesweg auf beiden Seiten um je 60 cm über das Beet hinausragt, beträgt die äußere Seitenlänge des Wegs ($16\text{ m} + 2 \cdot 0,6\text{ m} =$) 17,2 m.

Wäre nun die gesamte Anlage ein Kieshof, so hätte dieser eine Flächengröße von ($17,2\text{ m} \cdot 17,2\text{ m} =$) $295,84\text{ m}^2$.

Im Inneren befindet sich aber das quadratische Beet, das zusammen mit dem Teich eine Fläche von ($16\text{ m} \cdot 16\text{ m} =$) 256 m^2 aufweist.

Folglich hat der Kiesweg eine Flächengröße von ($295,84\text{ m}^2 - 256\text{ m}^2 =$) $39,84\text{ m}^2$, gerundet 40 m^2 .

Alternativer Lösungsweg: Man kann sich den Kiesweg aus vier Streifen von jeweils 16,6 m Länge und 0,6 m Breite vorstellen. Dann ergibt sich die gesamte Kiesfläche zu ($4 \cdot 16,6\text{ m} \cdot 0,6\text{ m} =$) $39,84\text{ m}^2$, gerundet 40 m^2 .

Teil b) Beet und Teich zusammen umfassen eine Fläche von 256 m^2 (siehe a)). Der Teich hat hiervon eine Flächengröße von ($12\text{ m} \cdot 12\text{ m} =$) 144 m^2 . Folglich hat das Beet eine Flächengröße von ($256\text{ m}^2 - 144\text{ m}^2 =$) 112 m^2 .

Daher ist die Fläche des Teiches größer als die des Beetes.

620622 Lösung

10 Punkte

Teil a) Unter der Bank sind ($\frac{2}{5} \cdot 120 =$) 48 Nüsse versteckt. Hinter dem Schuppen liegen ($\frac{1}{6} \cdot 120 =$) 20 Nüsse und hinter der Regentonne sind es ($\frac{3}{8} \cdot 120 =$) 45 Nüsse. In der Holzkiste liegen die restlichen ($120 - 48 - 20 - 45 =$) 7 Nüsse.

Teil b)

Anzahl der Nüsse in der Holzkiste: x
Anzahl der Nüsse hinter der Regentonne: $4x$
Anzahl der Nüsse hinter dem Schuppen: $x + 8$
Anzahl der Nüsse unter der Bank: $4x + 3$
Gesamtzahl der Nüsse: 51

Es ergibt sich die Gleichung $x + 4x + (x + 8) + (4x + 3) = 51$, die vereinfacht zu $10x + 11 = 51$ wird. Daraus folgt $10x = 40$ und $x = 4$.

In der Holzkiste liegen 4 Nüsse, hinter der Regentonne ($4 \cdot 4 =$) 16 Nüsse, hinter dem Schuppen ($4 + 8 =$) 12 Nüsse und unter der Bank ($16 + 3 =$) 19 Nüsse.

Kontrolle: $4 + 16 + 12 + 19 = 51$

Alternative Lösung über systematisches Probieren:

Da die kleinste Anzahl an Nüssen in der Holzkiste liegt, ist es sinnvoll, alle weiteren Nussanzahlen auf diese zu beziehen.

Holzkiste	Regentonne	Schuppen	Bank	Gesamtzahl	Ist die Gesamtzahl 51?
1	4	9	7	$1 + 4 + 9 + 7 = 21$	nein
2	8	10	11	$2 + 8 + 10 + 11 = 31$	nein
3	12	11	15	$3 + 12 + 11 + 15 = 41$	nein
4	16	12	19	$4 + 16 + 12 + 19 = 51$	ja

Da bei einer Erhöhung der Anzahl an Nüssen in der Holzkiste um 1 die Gesamtzahl der Nüsse jeweils um 10 wächst, ist das Ergebnis eindeutig: In der Holzkiste liegen 4 Nüsse, hinter der Regentonne 16, hinter dem Schuppen 12 und unter der Bank 19 Nüsse.

620623 Lösung

10 Punkte

Die Namen Amelie, Britta und Charlotte werden mit A, B bzw. C abgekürzt.

Teil a) Es gibt die folgenden sechs Möglichkeiten:

Würfel	Pyramide	Kegel
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Teil b) Es werden alle möglichen sechs Fälle und die entsprechenden Anzahlen der Murmeln betrachtet (die Anzahlen der Murmeln von A, B und C werden durch a , b und c angegeben):

Würfel (gleiche Anzahl)	Pyramide (doppelte Anzahl)	Kegel (vierfache Anzahl)	Anzahl der genommenen Murmeln	Rest
$a = 1 + 1$	$b = 2 + 4$	$c = 3 + 12$	$2 + 6 + 15 = 23$	1
$a = 1 + 1$	$c = 3 + 6$	$b = 2 + 8$	$2 + 9 + 10 = 21$	3
$b = 2 + 2$	$a = 1 + 2$	$c = 3 + 12$	$4 + 3 + 15 = 22$	2
$b = 2 + 2$	$c = 3 + 6$	$a = 1 + 4$	$4 + 9 + 5 = 18$	6
$c = 3 + 3$	$a = 1 + 2$	$b = 2 + 8$	$6 + 3 + 10 = 19$	5
$c = 3 + 3$	$b = 2 + 4$	$a = 1 + 4$	$6 + 6 + 5 = 17$	7

Die Restanzahl von 5 Murmeln kommt in der Tabelle nur einmal vor.

Folglich kann die Lehrerin eindeutig herausfinden, dass Charlotte den Würfel, Amelie die Pyramide und Britta den Kegel gebastelt hat.

620624 Lösung

10 Punkte

Teil a) Für die $(6 \cdot 18 =)$ 108 Stufen benötigt Alex $(108 : 2 =)$ 54 Sekunden.

Teil b) Alex läuft beim Hinunterlaufen dreimal so schnell wie Opa Jürgen. Alex läuft daher drei Teile der Treppe und Opa Jürgen einen Teil: Opa Jürgen geht $(\frac{1}{4} \cdot 108 =)$ 27 Stufen hinauf, Alex läuft $(\frac{3}{4} \cdot 108 = 3 \cdot 27 =)$ 81 Stufen hinunter.

Sie treffen sich auf der 27. Stufe.

Teil c) Während Alex drei Stockwerke hinunter läuft, geht Opa Jürgen ein Stockwerk nach oben. Er ist dann im vierten Stock und hat noch zwei Stockwerke vor sich.

In der Zeit, die Opa Jürgen für diese zwei Stockwerke braucht und damit oben ist, schafft Alex doppelt so viel, also vier Stockwerke; er beginnt aber ganz unten.

Damit ist klar: Opa Jürgen kommt zuerst oben an, denn Alex ist zu diesem Zeitpunkt erst im 4. Stock.