Olympiadeklasse **7**

62. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

620721

In der höchsten isländischen Fußball-Liga spielen genau 12 Mannschaften, davon genau 5, die ihr eigenes Stadion in der Hauptstadt Reykjavik haben. Jede Mannschaft trägt in jeder Saison gegen jede andere Mannschaft genau zwei Spiele aus, und zwar ein Heimspiel in ihrem eigenen Stadion und ein Auswärtsspiel im Stadion der gegnerischen Mannschaft. Im Folgenden betrachten wir nur die Spiele einer Saison in dieser Liga.

a) Ermittle die Anzahl aller Spiele.
b) Ermittle die Anzahl aller Spiele, in denen zwei Mannschaften aus Reykjavik gegeneinander antreten.
c) Ermittle die Anzahl aller Spiele, bei denen jeweils eine Mannschaft aus Reykjavik gegen eine Mannschaft antritt, die nicht aus Reykjavik ist.
d) Ermittle die Anzahl aller Spiele, die nicht in Reykjavik stattfinden.

620722

Frau Richter, Herr Steinert und Frau Thierbach unterrichten Biologie, Chemie, Deutsch, Mathematik, Physik und Sport. Jede Lehrkraft unterrichtet genau zwei dieser Fächer, keine zwei Lehrkräfte unterrichten dasselbe Fach und keine Lehrkraft unterrichtet zwei Klassen zur gleichen Zeit. Es ist Folgendes bekannt:

(1) Die Lehrkraft für Mathematik ist nicht die Lehrkraft für Biologie.
(2) Die Chemielehrkraft ist älter als die Sportlehrkraft.
(3) Die Lehrkraft für Biologie, die Lehrkraft für Sport und Frau Thierbach haben am Montag in der ersten Stunde in drei Klassen Unterricht.
(4) Die Lehrkräfte für Mathematik und Deutsch sind Nachbarn.
(5) Frau Thierbach ist jünger als die beiden anderen.
(6) Frau Richter ist weder die Lehrkraft für Mathematik noch die für Biologie.

a) Ermittle, wer Biologie unterrichtet.
b) Ermittle, wer Sport unterrichtet.
c) Weise nach, dass auch die restlichen Zuordnungen von Lehrkräften zu Fächern eindeutig bestimmt sind, und gib diese Zuordnungen an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

620723

Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b wird mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ bezeichnet, das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen mit $\mathrm{kgV}(a, b)$.

a) Ermittle $\mathrm{ggT}(36, 156)$ und $\mathrm{kgV}(36, 156)$.
b) Ermittle alle geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $\mathrm{kgV}(a, b) = 1\,080$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 6$.

Hinweis: Unter einem geordneten Paar (a, b) versteht man ein aus a und b gebildetes Paar, bei dem die Reihenfolge von a und b im Paar berücksichtigt wird, in dem also a an erster und b an zweiter Stelle steht. So sind zum Beispiel die geordneten Paare $(2, 1)$ und $(1, 2)$ voneinander verschieden.

620724

Von einem Rechteck $ABCD$ und zwei Punkten E und F wird vorausgesetzt:

(1) Die Seite $\overline{AB}$ ist 6 cm und die Seite $\overline{BC}$ ist 4 cm lang.
(2) Der Punkt E ist Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$.
(3) Der Punkt F liegt so auf dem Rand des Rechtecks $ABCD$, dass die Strecke $\overline{EF}$ die Fläche des Rechtecks $ABCD$ in zwei Teilflächen zerlegt, von deren Flächeninhalten einer halb so groß wie der andere ist.

Untersuche, wie viele mögliche Lagen es für den Punkt F gibt. Berechne für jede dieser Lagen die Länge der Strecke $\overline{AF}$.

62. Mathematik-Olympiade
2. Runde (Regionalrunde)
Lösungen

620721 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Da jede der 12 Mannschaften gegen jede der anderen $(12 - 1 =)$ 11 Mannschaften genau einmal im Heimspiel spielt und dieses Spiel für die jeweils andere Mannschaft das entsprechende Auswärtsspiel ist, gibt es insgesamt genau $(12 \cdot 11 =)$ 132 Spiele.

Teil b) Da es genau 5 Mannschaften aus Reykjavik sind, folgt entsprechend Teil a), dass es genau $(5 \cdot 4 =)$ 20 Spiele gibt, bei denen zwei Mannschaften aus Reykjavik gegeneinander antreten.

Teil c) Da es genau 5 Mannschaften aus Reykjavik sind, sind es genau $(12 - 5 =)$ 7 Mannschaften, die nicht aus Reykjavik sind. Jede der 5 Mannschaften aus Reykjavik spielt gegen jede der 7 Mannschaften, die nicht aus Reykjavik ist, genau zweimal, nämlich ein Heimspiel und ein Auswärtsspiel. Daher sind es genau $(5 \cdot 7 \cdot 2 =)$ 70 Spiele, bei denen jeweils eine Mannschaft aus Reykjavik gegen eine Mannschaft antritt, die nicht aus Reykjavik ist.

Teil d) Ein Spiel findet genau dann nicht in Reykjavik statt, wenn die Heim-Mannschaft nicht aus Reykjavik kommt. Da es genau 7 Mannschaften sind, die nicht aus Reykjavik kommen, und diese jeweils $(12 - 1 =)$ 11 Heimspiele haben, sind es genau $(7 \cdot 11 =)$ 77 Spiele, die nicht in Reykjavik stattfinden.

620722 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung:

Teil a) Nach (6) unterrichtet Frau Richter nicht Biologie und nach (3) auch Frau Thierbach nicht. Folglich gilt:

(7) Herr Steinert unterrichtet Biologie.

Teil b) Nach (3) ist Frau Thierbach nicht die Lehrkraft für Biologie und auch nicht die Lehrkraft für Sport, da die Lehrkraft für Biologie, die Lehrkraft für Sport und Frau Thierbach sonst weniger als drei Personen wären und sie daher nicht drei Klassen gleichzeitig unterrichten könnten. Folglich gilt:

(8) Frau Thierbach unterrichtet nicht Sport und nicht Biologie.

Weil wegen (3) die Lehrkräfte für Biologie und Sport verschiedene Personen sind und wegen (7) Herr Steinert Biologie unterrichtet, unterrichtet er ebenfalls nicht Sport. Daher gilt:

(9) Frau Richter unterrichtet Sport.

Teil c) Wir notieren in der folgenden Tabelle schrittweise die Aussagen, wobei „+“ heißt, dass die Lehrkraft das Fach unterrichtet, und „–“ heißt, dass die Lehrkraft das Fach nicht unterrichtet. Wir kürzen die Fächer mit „Bio“, „Che“, „Deu“, „Mat“, „Phy“ und „Spo“ ab.

	Bio	Che	Deu	Mat	Phy	Spo
Richter	(6) −	(12) −	(16) +	(6) −	(17) −	(9) +
Steinert	(7) +	(14) +	(14) −	(10) −	(14) −	(9) −
Thierbach	(8) −	(13) −	(15) −	(11) +	(17) +	(8) −

Die ersten Einträge ergeben sich aus den Angaben (6), (7), (8) und (9).

Nach (1) sind die Lehrkräfte für Mathematik und Biologie verschiedene Personen. Wegen (7) und (9) gilt daher:

(10) Herr Steinert unterrichtet nicht Mathematik.

Da wegen (6) und (10) weder Frau Richter noch Herr Steinert die Lehrkraft für Mathematik ist, folgt

(11) Frau Thierbach unterrichtet Mathematik.

Nach (2) sind die Lehrkräfte für Chemie und Sport verschiedene Personen. Wegen (9) gilt daher:

(12) Frau Richter unterrichtet nicht Chemie.

Frau Thierbach ist nach (5) jünger als die beiden anderen, also die jüngste Lehrkraft. Weil nach (2) die Chemielehrkraft nicht die jüngste Lehrkraft ist, folgt:

(13) Frau Thierbach unterrichtet nicht Chemie.

Da wegen (12) und (13) weder Frau Richter noch Frau Thierbach die Lehrkraft für Chemie ist, folgt wegen (7):

(14) Herr Steinert unterrichtet Chemie, aber nicht Deutsch oder Physik.

Da nach (4) die Lehrkräfte für Mathematik und Deutsch Nachbarn sind, folgt wegen (11):

(15) Frau Thierbach unterrichtet nicht Deutsch.

Da wegen (14) und (15) weder Herr Steinert noch Frau Thierbach die Lehrkraft für Deutsch ist, folgt:

(16) Frau Richter unterrichtet Deutsch.

Da jede der Lehrkräfte genau zwei der Fächer unterrichtet, folgt:

(17) Frau Thierbach unterrichtet Physik.

Die Zuordnungen von Lehrkräften zu Fächern sind daher eindeutig bestimmt: Frau Richter unterrichtet Deutsch und Sport, Herr Steinert Biologie und Chemie sowie Frau Thierbach Mathematik und Physik.

Zweite Lösung:

Teil a) Nach (6) ist Frau Richter nicht die Lehrkraft für Biologie. Nach (3) ist auch Frau Thierbach nicht die Lehrkraft für Biologie, da keine zwei dieser Lehrkräfte dasselbe Fach unterrichten. Da jedes der sechs Fächer nach Aufgabenstellung aber von genau einer der

Lehrkräfte Frau Richter, Herr Steinert und Frau Thierbach unterrichtet wird, folgt, dass Herr Steinert Biologie unterrichtet.

Teil b) Da nach (3) die Lehrkräfte für Biologie und Sport voneinander verschieden sind, ist nach Teil a) Herr Steinert nicht die Lehrkraft für Sport. Nach (3) sind auch Frau Thierbach und die Lehrkraft für Sport voneinander verschieden, weswegen Frau Thierbach nicht die Lehrkraft für Sport ist. Da Sport nach Aufgabenstellung aber von einer der Lehrkräfte Frau Richter, Herr Steinert und Frau Thierbach unterrichtet wird, folgt, dass Frau Richter Sport unterrichtet.

Teil c) Da Herr Steinert die Lehrkraft für Biologie ist, diese nach (1) aber nicht die Lehrkraft für Mathematik ist, ist er nicht die Lehrkraft für Mathematik. Da Frau Richter nach (6) auch nicht die Lehrkraft für Mathematik ist, eine der drei Personen aber die Lehrkraft für Mathematik ist, folgt, dass Frau Thierbach die Lehrkraft für Mathematik ist.

Da Frau Thierbach die Lehrkraft für Mathematik ist, ist sie wegen (4) nicht die Lehrkraft für Deutsch. Wegen (2) und (5) ist Frau Thierbach auch nicht die Lehrkraft für Chemie. Da nach Aufgabenstellung jede der drei Lehrkräfte aber zwei der Fächer Biologie, Chemie, Deutsch, Mathematik, Physik und Sport unterrichtet, Frau Thierbach aber keines der Fächer Biologie, Chemie, Deutsch und Sport unterrichtet, folgt, dass sie Physik unterrichtet.

Da Frau Richter die Lehrkraft für Sport ist, ist sie wegen (2) nicht die Lehrkraft für Chemie. Da sie auch keines der Fächer Biologie, Mathematik und Physik unterrichtet, verbleibt als ihr zweites Fach nur noch Deutsch.

Da Frau Richter und Frau Thierbach nicht Lehrkraft für Chemie sind, ist Herr Steinert die Lehrkraft für Chemie.

Folglich sind alle Zuordnungen von Lehrkräften zu Fächern eindeutig bestimmt: Frau Richter unterrichtet also Deutsch und Sport, Herr Steinert Biologe und Chemie, Frau Thierbach Mathematik und Physik.

620723 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Wegen $36 = 2^2 \cdot 3^2$ und $156 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$ gelten $\mathrm{ggT}(36, 156) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$ und $\mathrm{kgV}(36, 156) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 = 468$.

Teil b) Erste Lösung:

I. Es sei (a, b) ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen mit $\mathrm{kgV}(a, b) = 1\,080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 6 = 2^1 \cdot 3^1$.

Die Zahlen a und b sind beide durch 2^1 teilbar, da sonst ihr größter gemeinsamer Teiler nicht durch 2 teilbar wäre, was er aber ist. Sie können nicht beide durch 2^2 teilbar sein, da sonst ihr größter gemeinsamer Teiler durch $(2^2 =)$ 4 teilbar wäre, was er aber nicht ist. Jedoch ist eine der beiden Zahlen durch 2^3 teilbar, da sonst ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches nicht den Faktor 2^3 hätte, was es aber hat. Daher hat eine der beiden Zahlen a und b die höchste Zweierpotenz 2^1 als Faktor und die andere die höchste Zweierpotenz 2^3.

Entsprechend folgt, dass eine der beiden Zahlen a und b die höchste Dreierpotenz 3^1 als Faktor hat und die andere die höchste Dreierpotenz 3^3 sowie dass eine der beiden Zahlen a und b die höchste Fünferpotenz 5^0 als Faktor hat und die andere die höchste Fünferpotenz 5^1.

Andere Primzahlen außer 2, 3 und 5 sind keine Teiler von a oder b, da sie kein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfaches von a und b sind.

Daher ist a das Produkt von entweder 2^1 oder 2^3 mit entweder 3^1 oder 3^3 sowie mit entweder 5^0 oder 5^1 und b ist das Produkt der jeweils anderen Faktoren. Folglich kommen für a nur die Produkte $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0$ $(= 6)$, $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$ $(= 24)$, $2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^0$ $(= 54)$, $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^0$ $(= 216)$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $(= 30)$, $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ $(= 120)$, $2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ $(= 270)$, $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ $(= 1\,080)$ in Frage. Daher ist (a, b) eines der geordneten Paare $(6, 1\,080)$, $(24, 270)$, $(30, 216)$, $(54, 120)$, $(120, 54)$, $(216, 30)$, $(270, 24)$ und $(1\,080, 6)$.

II. Wie die Probe zeigt, erfüllen die geordneten Paare $(6, 1\,080)$, $(24, 270)$, $(30, 216)$, $(54, 120)$, $(120, 54)$, $(216, 30)$, $(270, 24)$ und $(1\,080, 6)$ tatsächlich die gestellten Forderungen.

Aus I. und II. folgt: Die gesuchten geordneten Paare sind $(6, 1\,080)$, $(24, 270)$, $(30, 216)$, $(54, 120)$, $(120, 54)$, $(216, 30)$, $(270, 24)$ und $(1\,080, 6)$.

Teil b) Zweite Lösung: Wir nennen zwei natürliche Zahlen teilerfremd, wenn sie außer 1 keine natürliche Zahl als gemeinsamen Teiler haben.

Zwei natürliche Zahlen a und b haben genau dann den größten gemeinsamen Teiler 6, wenn $a = 6 \cdot a'$ und $b = 6 \cdot b'$ mit zwei teilerfremden natürlichen Zahlen a' und b' gelten. Wegen der Teilerfremdheit von a' und b' ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b dann $6 \cdot a' \cdot b'$. Wegen $1\,080 = 6 \cdot 180$ haben zwei natürliche Zahlen a und b genau dann den größten gemeinsamen Teiler 6 und das kleinste gemeinsame Vielfache $1\,080$, wenn $a = 6 \cdot a'$, $b = 6 \cdot b'$ und $a' \cdot b' = 180$ mit zwei teilerfremden natürlichen Zahlen a' und b' gelten. Es sind daher alle Zerlegungen von 180 in ein Produkt aus zwei teilerfremden natürlichen Zahlen a' und b' zu bestimmen:

$$180 = 1 \cdot 180 = 4 \cdot 45 = 5 \cdot 36 = 9 \cdot 20 = 20 \cdot 9 = 36 \cdot 5 = 45 \cdot 4 = 180 \cdot 1\,.$$

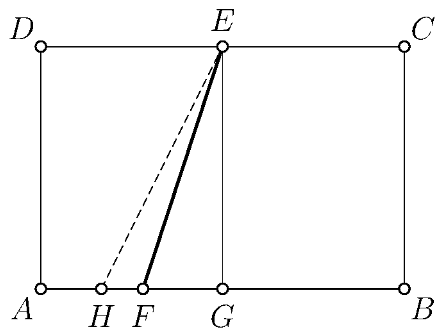
Die gesuchten geordneten Paare sind daher $(6, 1\,080)$, $(24, 270)$, $(30, 216)$, $(54, 120)$, $(120, 54)$, $(216, 30)$, $(270, 24)$ und $(1\,080, 6)$.

Bemerkung: Die in der zweiten Lösung angegebenen Überlegungen führen zu folgendem Satz: *Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt* $\operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{kgV}(a, b) = a \cdot b$.

620724 Lösung *10 Punkte*

Wir überlegen zuerst, wie groß die Inhalte der beiden Teilflächen des Rechtecks $ABCD$ sind. Da wegen (3) die kleinere Teilfläche einen halb so großen Flächeninhalt hat wie die größere, hat die größere Teilfläche den doppelten Flächeninhalt der kleineren Teilfläche. Folglich hat die kleinere Teilfläche ein Drittel und die größere zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$. Ein Punkt F erfüllt also genau dann die Forderung (3), wenn er auf dem Rand des Rechtecks liegt und die Strecke $\overline{EF}$ die Fläche des Rechtecks $ABCD$ in zwei Teilflächen zerlegt, von denen die größere zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ hat.

Es sei G der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Da $ABCD$ ein Rechteck ist, folgt wegen (2), dass auch $BCEG$ ein Rechteck ist, bei dem der Winkel $\sphericalangle BGE$ ein rechter Winkel ist, die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{EG}$ gleich lang sind und dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Rechtecks $ABCD$ ist.



L 620724

Wir betrachten den Punkt H auf der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AH}| = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}|$, siehe Abbildung L 620724. Dann liegt der Punkt H auf der Strecke $\overline{AG}$ und es folgt

$$|\overline{GH}| = |\overline{AG}| - |\overline{AH}| = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AB}|\,.$$

Wegen $|\sphericalangle BGE| = 90°$ und nach dem Nebenwinkelsatz gilt $|\sphericalangle EGH| = 90°$. Wegen $|\overline{BC}| = |\overline{EG}|$ hat das in G rechtwinklige Dreieck EHG daher den Flächeninhalt $(\frac{1}{2} \cdot |\overline{GH}| \cdot |\overline{EG}| =)$ $\frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|$, also ein Sechstel des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$. Die Fläche des Vierecks $BCEH$ setzt sich aus den Flächen des Rechtecks $BCEG$ und des Dreiecks EHG zusammen. Der Flächeninhalt des Vierecks $BCEH$ ist daher $(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =)$ zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$.

Fall 1: Der Punkt F liege auf der Strecke $\overline{GH}$ und sei verschieden vom Punkt H. Dann ist der Flächeninhalt des Vierecks $BCEF$ mindestens halb so groß wie der des Rechtecks $ABCD$, also größer als ein Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks. Der Flächeninhalt des Vierecks $BCEF$ ist aber auch um den Flächeninhalt des Dreiecks EHF kleiner als der des Vierecks $BCEH$ und daher kleiner als zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks. Daher erfüllt der Punkt F in diesem Fall die Forderung (3) nicht.

Fall 2: Es gelte $F = H$. Dann ist der Flächeninhalt des Vierecks $BCEF$ zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$, weswegen der Punkt F die Forderung (3) erfüllt. In diesem Fall gilt $|\overline{AF}| = |\overline{AH}| = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}|$. Wegen (1) folgt $|\overline{AF}| = 1\,\text{cm}$.

Fall 3: Der Punkt F liege auf der Strecke $\overline{AH}$ oder auf der Strecke $\overline{AD}$ und sei verschieden von den Punkten H und D. Durch die Strecke $\overline{EF}$ wird dann die Fläche des Rechtecks $ABCD$ in zwei Teilflächen zerlegt, von denen eine das Viereck $BCEF$ oder das Fünfeck $ABCEF$ ist. Deren Flächeninhalt ist um den Flächeninhalt des Dreiecks EFH oder des Vierecks $AHEF$ größer als der Flächeninhalt des Vierecks $BCEH$ und daher größer als zwei Drittel des Flächeninhalts des Rechtecks, weswegen der Punkt F die Forderung (3) nicht erfüllt.

Fall 4: Der Punkt F liege auf der Strecke $\overline{DE}$. In diesem Fall wird die Fläche des Rechtecks $ABCD$ durch die Strecke $\overline{EF}$ nicht in zwei Teilflächen zerlegt, also wird auch in diesem Fall die Forderung (3) nicht erfüllt.

Daher folgt: Auf dem durch die Strecken $\overline{AG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DE}$ gebildeten Teil des Randes des Rechtecks $ABCD$ gibt es nur eine Lage für den Punkt F, in der die Forderung (3) erfüllt wird, nämlich $F = H$.

Da das Rechteck $ABCD$ wegen (2) und nach Wahl des Punktes G symmetrisch zur Geraden EG ist, folgt durch Spiegelung an dieser Geraden, dass es auf dem durch die Strecken $\overline{BG}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CE}$ gebildeten Teil des Randes des Rechtecks $ABCD$ auch nur eine Lage für den Punkt F gibt, in der die Forderung (3) erfüllt wird, nämlich $F = H'$, wobei der Punkt H' der Spiegelpunkt des Punktes H bei Spiegelung an der Geraden EG ist. Wegen $|\overline{AH}| = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}|$ gilt $|\overline{BH'}| = \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}|$. Da der Punkt H' auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt, folgt $|\overline{AH'}| = |\overline{AB}| - \frac{1}{6} \cdot |\overline{AB}| = \frac{5}{6} \cdot |\overline{AB}|$. Wegen (1) folgt hier $|\overline{AF}| = 5\,\text{cm}$.

Folglich gibt es genau zwei mögliche Lagen des Punktes F, in denen die Forderung (3) erfüllt wird, nämlich auf der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AF}| = 1\,\text{cm}$ und mit $|\overline{AF}| = 5\,\text{cm}$.